ある種の特異性をもつ微分方程式系の幾何学 (可微分写像の特異点論とそれに関連する幾何学)

数理解析研究所講究録
第 1707 巻 2010 年 1-8

ある種の特異性をもつ微分方程式系の幾何学

野田 尚廣 (名古屋大学)

渋谷 一博氏 (広島大学) との共同研究.

1. Introduction

本講究録においては, 我々の最近の共同研究における結果について報告する. 詳細は文献 ([NS1]) を参照していただきたい.

我々は二変数一未知関数に対する二階の単独型偏微分方程式系のなかで, ある種の特異性を持つものに体系的な幾何学的解釈を与える. まずは, 微分方程式を定義する上で必要となる 2 変数 1 未知関数に関する二階のジェット空間を導入しよう.

$$J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) := \{(x, y, z, p, q, r, s, t)\} \cong \mathbb{R}^8 \tag{1}$$

ここで, J^2 は次で与えられる階数 5 の微分式系 (ベクトル束) $C^2 := \{\varpi_0 = \varpi_1 = \varpi_2 = 0\}$ を持つ.

$$\begin{aligned}\varpi_0 &:= dz - pdx - qdy,\\ \varpi_1 &:= dp - rdx - sdy,\\ \varpi_2 &:= dq - sdx - tdy.\end{aligned}$$

Remark 1.1. この C^2 によって, 座標系は 2 変数関数 $z = z(x, y)$ に対して, $(x, y, z(x, y), z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy})$ とみなせる. この空間は Taylor 展開の 2 次までの近似に相当する.

さて, 関数 $F \in C^\infty(J^2)$ をとることにより, 今回扱う二階の単独型 PDE が与えられる:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \tag{2}$$

この方程式に対して, F の regularity condition:

$$(F_r, F_s, F_t) \neq (0, 0, 0) \tag{3}$$

を仮定すると, $\Sigma = \{F = 0\} \subset J^2$ は smooth hypersurface. さらに, 自然な射影 $\pi : J^2 \to J^1$ の超曲面 Σ への制限 $\pi|_\Sigma$ は submersion. (i.e. 微分写像が全射.)

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 58A15; Secondary 57S20.

Key words and phrases. second order partial differential equations, equivalence problem, exterior differential systems, contact invariant.

Author supported by Research Fellowships of the Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists.

Remark 1.2. ちなみに $J^1 = \{(x, y, z, p, q)\} \cong \mathbb{R}^5$ とは, 微分式系 $C^1 = \{\varpi_0 = 0\}$ をもった標準接触多様体のことを指す.

この性質から, C^2 の Σ への制限 $D := \{\varpi_i|_\Sigma = 0\}$ もまた微分式系となる. (i.e. constant rank) よって, PDE (2) の幾何学的対応物として微分式系 (Σ, D) を考えることができる. この対応により, 2つの方程式 $F = 0$ と $\hat{F} = 0$ の J^2 上の接触変換 (C^2 の局所同型写像) による同値性は, 対応する微分式系 (Σ, D) と $(\hat{\Sigma}, \hat{D})$ の局所同型性 (i.e. $\exists \phi : \Sigma \to \hat{\Sigma}$ s.t $\phi_* D = \hat{D}$) で置き換わる.

Remark 1.3. これにより, 例えば (Σ, D) の局所不変量などは, 対応する微分方程式系の (同値問題に関する) 局所不変量にもなる.

さて, このような流れは微分方程式に対して, 微分式系が自然と誘導されたからで, それは regularity condition(3) があったからである. すると, 次の疑問が自然と浮かぶ.

Problem 1.4. 条件 (3) を外した時, 方程式系に関してどのような微分式系の幾何学が展開されるであろうか?

この問題をきっちり定式化する. 条件 (3) が外れた時, 特に以下の2つがいままでと異なる.
(i) Σ は特異点を持つ.
(ii) $D = C^2|_\Sigma$ は微分式系とは限らない. (退化)
このような状況下で, あくまで微分式系の視点からこの方程式系を調べるため, 今回は以下の仮定をおく.

Assumption 1.5. $\Sigma = \{F = 0\}$ を二階の PDE とする. そのとき, 次の条件を満たすような射影 $\pi|_\Sigma$ に対する nonsubmersion point $w \in \Sigma$ (i.e. $(F_r, F_s, F_t)_w = (0, 0, 0)$.) が存在すると仮定する. Σ は $dF \neq 0$ をみたす smooth hypersurface であり, $D := C^2|_\Sigma$ は w のまわりで微分式系となる.

Remark 1.6. これ以降, $dF \neq 0$ をみたす Σ を smooth hypersurface と呼ぶ.

このような仮定をみたす方程式系を体系的に研究する.

2. 具体例と一般的な特徴づけ

ここでは, はじめに我々が調べる方程式系の典型例を挙げ, さらにそのような方程式系の特徴づけを与える.

Example 2.1. $\Sigma := \{F := rt - p = 0\}$ を考えよう. $dF \neq 0$ より Σ は超曲面で, $(F_r, F_s, F_t) = (t, 0, r)$ より, 余次元2の部分多様体 $\{r = t = 0\} \subset \Sigma$ 上で $\pi|_\Sigma$ は nonsubmersion. さて, 問題はこの上で D が constant rank (i.e. rank 4) となるかである. Σ 上の

微分式系 $D=\{\varpi_0=\varpi_1=\varpi_2=0\}$ は一般的には

$$\begin{aligned}\varpi_0 &:= dz - rtdx - qdy\\ \varpi_1 &:= rdt + tdr - rdx - sdy\\ \varpi_2 &:= dq - sdx - tdy\end{aligned}$$

で与えられる. ここで $r=t=0$ を代入すると,

$$\begin{aligned}\varpi_0 &:= dz - qdy,\\ \varpi_1 &:= -sdy,\\ \varpi_2 &:= dq - sdy.\end{aligned}$$

よって, D の rank は,

$$\begin{aligned}&Rank\ 5\ on\ r=t=s=0,\\ &Rank\ 4\ on\ r=t=0,\ s\neq 0,\\ &Rank\ 4\ on\ generic\ (submersion)\ point.\end{aligned}$$

となる. $r=s=t=0$ 上の点は我々の仮定を満たさない. すなわち, $r=t=0,\ s\neq 0$ のまわりでの D の局所挙動が今回の研究対象である.

次に, Assumption 1.5 を満たす微分式系が持つ基本性質を紹介するために必要な Cauchy 特性系の概念を導入する.

Definition 2.2. 微分式系 D の Cauchy 特性系とは, 各点 $w\in\Sigma$ に対して, 次で定義されるものをいう.

$$\begin{aligned}Ch(D)(w): \quad &= \{X\in D(x)\mid X\rfloor d\varpi_i\equiv 0,\\ &\quad (\mathrm{mod}\ \varpi_0,\varpi_1,\varpi_2)\quad \text{for } i=0,1,2\}\\ &= \{X(x)\in D(x)\mid [X,Y]\in\mathcal{D}\\ &\quad \text{for any } Y(x)\in D(x)\},\end{aligned}$$

Remark 2.3. $Ch(D)$ は微分式系になるとは限らないが, もしもそうなら完全積分可能となる.

これらの概念に対して, 我々の微分式系は次の性質を持つ:

Proposition 2.4. $\Sigma=\{F=0\}$ を $J^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ の *smooth hypersurface* とし, D が微分式系になるとする. その時, 次は同値*:*
(1) $w\in\Sigma$ は *nonsubmersion point.*
(2) $dim\ Ch(D)_w=1$. (*regular* な場合, $Ch(D)=0$.)
(3) $dim\ Ch(\partial D)_w=4$. (*regular* な場合, 2 次元.)
ここで, $\partial D:=D+[D,D]$.

Proposition 2.5. $\Sigma = \{F=0\}$ を *smooth hypersurface* とし, D が微分式系になるとする. その時, $Ch(D)$ が *subbundle* であることと, $Ch(\partial D)$ が *subbundle* であることは同値であり, さらにこの 2 つが *bundle* になる時, $(rank\ Ch(D), rank\ Ch(\partial D)) = (0,2)$ *or* $(1,4)$.

まとめると, Assumption 1.5 を満たす方程式系のひとつの特徴づけとして, 次の結果が得られる.

Theorem 2.6. $\Sigma = \{F=0\}$ を *smooth hypersurface* とし, D が微分式系になるとする. このとき, $w \in \Sigma$ に対し, 次の条件は同値である.
(1) w は射影 $\pi|_\Sigma$ に関する *nonsubmersion point.*
(2) w は *Cauchy* 特性系 $Ch(D)$ (あるいは $Ch(\partial D)$)) のベクトル束としての特異点.

次に, 田中昇氏によって導入された微分式系に対する（接触変換の下での）局所不変量である Symbol algebra を導入する. D を Σ 上の weakly regular な微分式系で,

$$T\Sigma \supset D^{-\mu} \supset D^{-(\mu-1)} \supset \cdots \supset D^{-1} =: D$$

となっているものとする. 任意の点 $x \in \Sigma$ に対して,
$\mathfrak{g}_{-1}(x) := D^{-1}(x) = D(x),\ \mathfrak{g}_p(x) := D^p(x)/D^{p+1}(x),$

$$\mathfrak{m}(x) := \bigoplus_{p=-1}^{-\mu} \mathfrak{g}_p(x).$$

とおく. この時, $\dim \mathfrak{m}(x) = \dim \Sigma$. $\mathfrak{m}(x)$ 上には, Lie bracket $[,]$ を入れることができ, このブラケット構造により $\mathfrak{m}(x)$ は nilpotent graded Lie algebra となる.

Definition 2.7. $(\mathfrak{m}(x),\ [\ ,\ ])$ を点 x における (Σ, D) の symbol algebra という.

Remark 2.8. symbol algebra は微分式系に対する不変量として知られている.

さて, 我々の対象とする微分式系において, nonsubmersion point における symbol algebra がどのような構造をもつかということが気になるが, 実は以下の結果が成り立つ:

Theorem 2.9. $\Sigma = \{F=0\} \subset J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ を *smooth hypersurface* とする. Σ は $\pi|_\Sigma$ に関する *nonsubmersion point* $w \in \Sigma$ を持ち, かつ w のまわりで $D := C^2|_\Sigma$ は微分式系になるとする. その時, w における *symbol algebra* $\mathfrak{m}(w)$ は次で与えられる $\mathfrak{m}$ に同型である:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{-3} \oplus \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}$$

ブラケット構造は次で与えられる;
$[X_r,\ X_x] = X_1, \quad [X_s,\ X_x] = X_2, \quad [X_1,\ X_x] = X_0$
the other is trivial,
ここで, $\{X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_x,\ X_r,\ X_s,\ X_t\}$ が基底で,

$$\mathfrak{g}_{-1} = \{X_x,\ X_r,\ X_s,\ X_t\},$$
$$\mathfrak{g}_{-2} = \{X_1,\ X_2\},$$
$$\mathfrak{g}_{-3} = \{X_0\}.$$

Remark 2.10. ただし, これは pointwise な議論で, 局所的に一階に落ちるわけではない. すなわち, まわりに submersion point はあるため, そこでの symbol algebra は上のものとは違う. この定理は, 今回対象としている方程式系, ならびに対応する微分式系に対しては, nonsubmersion point における symbol algebra が一意的に決定されるという事実を与える.

従って, symbol algebra の下では今回の微分式系は区別できないため, 何か別の道具が必要とされる.

3. 二階の単独型偏微分方程式に対する新しい不変量

ここでは, Assumption 1.5 を満たす方程式系を分別するための（接触変換のもとでの）局所不変量を新しく導入する. ちなみに, この不変量は regular な方程式系に対しても有効であり, Assumption 1.5 を満たす必要はない.
$\Sigma := \{F = 0\} \subset J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ を smooth hypersurface とする. 基点 $w \in \Sigma$ を固定する. w の任意の近傍 U に対し, U は次のように分解される.

$$U = U_h \cup U_e \cup U_p \cup U_{sing} \quad \text{(disjoint union)}, \tag{4}$$

ここで, 各成分は判別式 $\Delta := F_r F_t - \frac{1}{4} {F_s}^2$ を用いて,

$$\begin{aligned} U_h &:= \{v \in U \mid \Delta(v) < 0\} & &: \text{hyperbolic type} \\ U_e &:= \{v \in U \mid \Delta(v) > 0\} & &: \text{elliptic type} \\ U_p &:= \{v \in U \mid \Delta(v) = 0,\ (F_r, F_s, F_t)_v \neq 0\} & &: \text{parabolic type} \\ U_{sing} &:= U \backslash (U_h \cup U_e \cup U_p) & & \end{aligned}$$

各成分に対し, 次のように同値関係を定める. $K_U := U_h$ or U_e or U_p or U_{sing}. その時, $w_1 \sim w_2$ $(w_1, w_2 \in K_U)$ を次で定める:

$$\exists\, c : [0,1] \to K_U \text{ s.t. } c(0) = w_1,\ c(1) = w_2. \tag{5}$$

$\#(K_U/\sim)$ を商空間 $K_U/\sim$ の元の個数（弧状連結成分の数）とする.

次に, J^2 から Euclid 計量を持った $\mathbb{R}^8$ への微分同相写像 $\phi : J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^8$ を一つ固定する. その時, 微分同相写像 ϕ によって J^2 上に norm が誘導される.

$$p, q \in J^2, \qquad |p - q| := ||\phi(p) - \phi(q)||,$$

ここで, $||\cdot||$ は Euclid norm. この norm に関して, 次の近傍をとる.

$$U := B_r(w) = \{v \in \Sigma \mid |v - w| < r\},$$

ここで, $|\cdot|$ は $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 上に誘導された norm の超曲面 Σ への制限を表す. この近傍に対しても, 先程同様に次の分解が得られる.

$$U = B_r^H(w) \cup B_r^E(w) \cup B_r^P(w) \cup B_r^{Sing}(w),$$

ここで,

$$B_r^H(w) := \{v \in B_r(w) \mid \Delta(v) < 0\} \quad : \text{hyperbolic}$$
$$B_r^E(w) := \{v \in B_r(w) \mid \Delta(v) > 0\} \quad : \text{elliptic}$$
$$B_r^P(w) := \{v \in B_r(w) \mid \Delta(v) = 0,\ (F_r, F_s, F_t) \neq 0\} : \text{parabolic}$$
$$B_r^{Sing}(w) := B_r(w) \backslash (B_r^H(w) \cup B_r^E(w) \cup B_r^P(w)).$$

さらに, これらの成分に対しても, 同値関係のもとで商空間を考えることが出来る. そのとき次の数 (弧状連結成分の数) を考えよう.

$$H(w) := \lim_{r \to 0} \#(B_r^H/\sim), E(w) := \lim_{r \to 0} \#(B_r^E/\sim),$$
$$P(w) := \lim_{r \to 0} \#(B_r^P/\sim), S(w) := \lim_{r \to 0} \#(B_r^{Sing}/\sim).$$

もし極限がないなら, ∞ とする. また, $(H, E, P, S)_w$ で $H(w), E(w), P(w)$, $S(w)$ から生成されるベクトルを表す.

Remark 3.1. これらの数は接触変換の下では不変であるが, diffeo $J^2 \cong \mathbb{R}^8$ の取り方による可能性がある. (i.e. induced norm に依存している.) よってこの段階では, これらの数は不変量としてはまだ well-defined ではない.

上記の問題点を解消して, 以下のように不変量を定義する:

Definition 3.2.

$$H(w) := \min_{J^2 \cong \mathbb{R}^8} \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \#(B_\varepsilon^H/\sim) \right),$$
$$E(w) := \min_{J^2 \cong \mathbb{R}^8} \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \#(B_\varepsilon^E/\sim) \right),$$
$$P(w) := \min_{J^2 \cong \mathbb{R}^8} \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \#(B_\varepsilon^P/\sim) \right),$$
$$S(w) := \min_{J^2 \cong \mathbb{R}^8} \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \#(B_\varepsilon^{Sing}/\sim) \right).$$

$(H, E, P, S)_w$ で $H(w), E(w), P(w)$, $S(w)$ によって生成されるベクトルを表す.

こうすれば微分同相写像の取り方にもよらないので, これは方程式系, ならびに対応する微分式系 (Σ, D) に対する, 基点 w において定義される不変量である.

この不変量を用いて, 微分式系を評価する. まず, regular PDE の中で, 次の標準形の特徴づけが定義より得られる:

Theorem 3.3. $\Sigma = \{F = 0\} \subset J^2$ を二階の *PDE* とする. その時,

(1) $(1, 0, 0, 0)_w \iff \Sigma$ is locally hyperbolic around w.

(2) $(0, 1, 0, 0)_w \iff \Sigma$ is locally elliptic around w.

(3) $(0, 0, 1, 0)_w \iff \Sigma$ is locally parabolic around w.

ここで, w は Σ の基点.

我々の対象とする Assumption 1.5 をみたす方程式系に対しては, 次の結果が成り立つ.

Theorem 3.4. $\Sigma = \{F = 0\}$ *を次で与えられる PDE とする;*

$$F := f - (a_1x + a_2y + a_3z + a_4p + a_5q + a_6)$$

ここで, f は r, s, t に関する 2 次の単項式で, $(a_1, .., a_5) \neq 0$ が成り立つとする. その時, Assumption 1.5 を満たす nonsubmersion point w における $(H, E, P, S)_w$ の値は F のみによる. (つまり, $(H, E, P, S)_w$ は nonsubmersion point の取りかたによらない.)
さらに, Σ に対する $(H, E, P, S)_w$ の値は次のいずれかになる.

(1) $(2, 0, 2, 1)_w$ for $f = rs$ or ts,

(2) $(2, 2, 4, 1)_w$ for $f = rt$,

(3) $(0, 0, 2, 1)_w$ for $f = r^2$ or t^2,

(4) $(2, 0, 0, 1)_w$ for $f = s^2$.

References

[BCG3] R. Bryant, S. S. Chern, R. Gardner, H. Goldscmidt, P. Griffiths, Exterior Differential Systems, MSRI Publ. vol. **18**, Springer Verlag, Berlin (1991).

[Car] E. Cartan, Les systèmes de Pfaff à cing variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre, Ann. École Normale, **27** (1910), 109–192.

[CJW] J. Clelland, M. Kossowski,G.R. Wilkens, Second-order type-changing evolution equations with first-order intermediate equations, J. Differential Equations, 244, (2008) no.2, 242–273.

[HIIY] K. Hayakawa, G. Ishikawa, S. Izumiya, K. Yamaguchi, Classification of generic integral diagrams and first order ordinary differential equations, Internat. J. Math. Vol. 5, No. 4, (1994) 447–489.

[IL] Ivey, Landsberg, Cartan for Beginners AMS 2003.

[NS1] T. Noda, K. Shibuya, On implicit second order PDE of a scalar function on a plane via differential systems, submitted.

[NS2] T. Noda, K. Shibuya, Second order type-changing equations for a scalar function on a plane, submitted.

[S] K. Shibuya, On the prolongation of 2-jet space of 2 independent and 1 dependent variables, Hokkaido Math.J. **38** (2009), 587–626.

[Tak] M. Takahashi, Bifurcations of ordinary differential equations of clairaut type, J. Differential Equations, 190, (2003) no.2, 579–599.

[Tan1] N. Tanaka On generalized graded Lie algebras and geometric structures I, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 215–254.

[Tan2] N. Tanaka, On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras, Hokkaido Math. J. 8 (1979), no. 1, 23–84.

[Ya1] K. Yamaguchi, Contact geometry of higher order, Japan. J. Math., **8** (1982), 109–176.

[Ya2] K. Yamaguchi, Geometrization of jet bundles, Hokkaido Math. J. **12** (1983), 27–40.

[Ya3] K. Yamaguchi, Differential systems associated with simple graded Lie algebras, Advanced Studies in Pure Math., **22** (1993), 413–494.

[Ya4] K. Yamaguchi, Contact geometry of second order I, Differential Equations -Geometry, Symmetries and Integrability- The Abel symposium 2008, Abel symposia **5**, 2009, 335–386.

[Ya5] K. Yamaguchi, *G_2-geometry of overdetermined systems of second order*, Trends in Mathematics (Analysis and Geometry in Several Complex variables) 1999, Birkhäuser, Boston, 289–314.

Takahiro Noda
Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602
Japan
E-mail address: m04031x@math.nagoya-u.ac.jp